物理数学２演習　　　　　第 06 回　1階微分方程(他の形)演習　解答

(1)　$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x}=x^2$：与えられた微分方程式は非斉次方程式（非同次方程式）と言われるものである。この一般解は、非斉次方程式の右辺をゼロにした方程式、これを斉次方程式（同次方程式）と呼ぶ、$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x}=0$ の一般解と問題の非斉次方程式の特解との和で与えられる。今の場合、斉次方程式の一般解は変数分離法を用いて $y=cx^2$ で与えられる。問題の方程式（非斉次方程式）の特解を求めるために、c を x の関数と考えて $y=cx^2$ の形でこの特解が求められないか調べる。そのために $y=cx^2$ を問題の方程式に代入する。その結果、c は $\dfrac{dc}{dx}=1$ を満たす関数として与えられれば良いことが分かる。これを満たす c は $c=x$ であり（ここでは特解を求めるので積分定数は付けない)、この c を $y=cx^2$ に代入して得られる、$y=x^3$ が問題の非斉次方程式の特解として求まる。このように、斉次方程式の一般解にある任意定数を独立変数 x の関数と考えて非斉次方程式の特解を求める方法を「定数変化法」という。さて、問題の微分方程式の一般解は（斉次方程式の一般解＋非斉次方程式の特解）で与えられるので $y=cx^2+x^3$ であることが分かる。これを実際に微分方程式に代入して成り立つことを確かめなさい。

(2)　$\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{3x}$：斉次方程式の一般解は $y=ce^{-2x}$ であるので、定数変化法を適用する。c を関数と見て問題の微分方程式に代入すると、c は $\dfrac{dc}{dx}=e^{5x}$ を満たす関数として定まる。$c=\dfrac{1}{5}e^{5x}$ がこの微分方程式の特解として求まり、与えられた方程式の一般解は $y=ce^{-2x}+\dfrac{1}{5}e^{3x}$ となる。

(3)　$\dfrac{dy}{dx}+2y=4\cos 2x$；斉次方程式の一般解は $y=ce^{-2x}$ であるので、定数変化法を適用する。c を関数と見て問題の微分方程式に代入すると、c は $\dfrac{dc}{dx}=4e^{2x}\cos 2x$ を満たす関数として定まる。部分積分などの良く知られたテクニックを使って、$c=e^{2x}\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$ と求まる。これから、非斉次方程式の特解は $y=\sin 2x+\cos 2x$ となるのでで、非斉次方程式の一般解はこれに

斉次方程式の一般解を加えて、 $y=ce^{-2x}+\sin 2x+\cos 2x$ となる。ここで c は任意の定数である。これが問題の微分方程式の解であることを直接代入することで確認しなさい。

(4) $y'+\dfrac{y}{x}=3\sqrt{x}$ の同次方程式 $y'+\dfrac{y}{x}==0$ の一般解は $y=\dfrac{c}{x}$ である。ここで問題の非同次方程式の一般解を c を x の関数と考えて求める。 $y=\dfrac{c}{x}$ を問題の式に代入すると、 $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{c'x-c}{x^2}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{c'}{x}=3\sqrt{x}$ となるので、これより $c'=3x^{\frac{3}{2}}$ となり、$c=\int 3x^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}$ が得られる。この結果から非同次方程式の一般解は $y=\dfrac{c}{x}+\dfrac{6x^{\frac{5}{2}}}{5x}=\dfrac{c}{x}+\dfrac{6x^{\frac{3}{2}}}{5}$ である。

(5) $y'-\dfrac{y}{x}=-6xe^{-2x}$ の同次方程式 $y'-\dfrac{y}{x}==0$ の一般解は $y=cx$ である。ここで問題の非同次方程式の一般解を c を x の関数と考えて求める。 $y=cx$ を問題の式に代入すると、 $y'-\dfrac{y}{x}=c'x+c-c=c'x=-6xe^{-2x}$ となるので、これより $c'=-6e^{-2x}$ となり、 $c=\int -6e^{-2x}dx=3e^{-2x}$ が得られる。この結果から非同次方程式の一般解は $y=cx+3xe^{-2x}$ である。

(6) $y'+\dfrac{y}{x+1}=e^x$ の同次方程式 $y'+\dfrac{y}{x+1}=0$ の一般解は $y=\dfrac{c}{x+1}$ である。ここで問題の非同次方程式の一般解を c を x の関数と考えて求める。 $y=\dfrac{c}{x+1}$ を問題の式に代入すると、 $y'+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{c'}{x+1}-\dfrac{c}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^2}=\dfrac{c'}{x+1}$ となり、これが e^x と等しいので、 $\dfrac{c'}{x+1}=e^x$ となる。れより $c'=e^x(x+1)$ となり、$c=\int e^x(x+1)dx=xe^x-e^x+e^x=xe^x$ が得られる。この結果から非同次方程式の一般解は $y=\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{xe^x}{x+1}$ である。

(7) $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=4x$ の同次方程式 $y'-\dfrac{2xy}{x^2+1}=0$ の一般解は、 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$ より

$\log|y| = \log(x^2+1) + c$ から、$y = d(x^2+1)$ となる。d は積分定数。ここで問題の非同次方程式の特解を d を x の関数と考えて求める。$y = d(x^2+1)$ を問題の式に代入すると、$y' + \dfrac{2xy}{x^2+1} = d'(x^2+1) = 4x$ となり、$d = \displaystyle\int \frac{4x}{x^2+1}dx = 2\log(x^2+1)$ となる。この結果から非同次方程式の一般解は $y = d(x^2+1) + 2\log(x^2+1)$ である。

(8) $y' - y\tan x = 2\sin x + 4\cos x$ の同次方程式 $y' - y\tan x = 0$ の一般解は、$\dfrac{dy}{y} = \tan x dx$ より $\log|y| = -\log|\cos x| + c = \log\dfrac{1}{|\cos x|} + c$ から、$y = \dfrac{C}{\cos x}$ となる。ここで問題の非同次方程式の一般解を C を x の関数と考えて求める。$y = \dfrac{C}{\cos x}$ を問題の式に代入すると、$y' - y\tan x = \dfrac{C'}{\cos x} = 2\sin x + 4\cos x$ となり、$C' = 2\sin x\cos x + 4\cos^2 x$ が得られ、

$C = \displaystyle\int(2\sin x\cos x + 4\cos^2 x)dx = \int(\sin 2x + 2(\cos 2x + 1))dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \sin 2x + 2x$ となる。この結果から非同次方程式の一般解は $y = \dfrac{C}{\cos x} + \dfrac{2\sin 2x - \cos 2x + 4x}{2\cos x}$ である。

(9) $y' + \dfrac{y}{\tan x} = x$ の同次方程式 $y' + \dfrac{y}{\tan x} = 0$ の一般解は、$\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{1}{\tan x}dx = -\dfrac{\cos x}{\sin x}dx$ より $\log|y| = -\log|\sin x| + c = \log\dfrac{1}{|\sin x|} + c$ から、$y = \dfrac{C}{\sin x}$ となる。ここで問題の非同次方程式の一般解を C を x の関数と考えて求める。$y = \dfrac{C}{\sin x}$ を問題の式に代入すると、$y' + \dfrac{y}{\tan x} = \dfrac{C'}{\sin x} = x$ となり、$C' = x\sin x$ に帰着される。これより、

$C = \displaystyle\int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + c$ となる。この結果から非同次方程式の一般解は $y = \dfrac{C}{\sin x} + \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin x} = 1 - \dfrac{x}{\tan x} + \dfrac{C}{\sin x}$ である。

2. (1)　微分方程式は$m\dfrac{dv}{dt}=-\eta v$である。　これを変数分離へ持っていく。これを変形して

$\dfrac{dv}{v}=-\dfrac{\eta}{m}dt$ とし、これを積分して$\log(v)=-\dfrac{\eta}{m}t+c$が得られる。対数をはずすと

$v=e^{-\frac{\eta}{m}t+c}=c'e^{-\frac{\eta}{m}t}$ として解が得られる。更に、$t=0$で$v=v_0$である解は（特解）

$c'=v_0$　として　$v=v_0e^{-\frac{\eta}{m}t}$　で与えられる。

(2) 微分方程式は　$m\dfrac{dv}{dt}=-\eta v-mg$　である。この微分方程式を　$\dfrac{dv}{v+\dfrac{mg}{\eta}}=-\dfrac{\eta}{m}dt$

と書き直し、積分すると　$\log\left(v+\dfrac{mg}{\eta}\right)=-\dfrac{\eta}{m}t+c$　が得られる。ここで対数をはずすと、

$v+\dfrac{mg}{\eta}=e^{-\frac{\eta}{m}t+c}=c'e^{-\frac{\eta}{m}t}$　となり、　一般解として　$v=c'e^{-\frac{\eta}{m}t}-\dfrac{mg}{\eta}$　が得られる。ここで、$c'=e^{c}$　で積分定数を与えた。更に、$t=0$で$v=v_0$である解は（特解）$c'=v_0+\dfrac{mg}{\eta}$　として　$v=\left(v_0+\dfrac{mg}{\eta}\right)e^{-\frac{\eta}{m}t}-\dfrac{mg}{\eta}$　で与えられる。

尚、この結論は、問題の微分方程式を非斉次方程式とみて、斉次方程式　$\dfrac{dv}{dt}+\dfrac{\eta}{m}v=0$　の一般解を求め、これと定数変化法により非斉次方程式の特解を加えても得られる。

実際、斉次方程式の一般解は　$y=ce^{-\frac{\eta}{m}t}$　であるが、定数変化法を適用すると $\dfrac{dc}{dt}e^{-\frac{\eta}{m}t}=-g$　および、これから　$\dfrac{dc}{dt}=-ge^{\frac{\eta}{m}t}$　によりcが定まる。$c=-\dfrac{mg}{\eta}e^{\frac{\eta}{m}t}$　として非斉次方程式の特解は　$c=-\dfrac{mg}{\eta}$　（今の場合は定数になる）であるから、一般解を求めると　$y=c'e^{-\frac{\eta}{m}t}-\dfrac{mg}{\eta}$　となり同様の結果である。

3.（1）曲線群は$\dfrac{dy}{dx}=2x$を満たす。 したがって、曲線群は$y=x^2+c$で与えられる。

これらの曲線で$x=1$において$y(1)=2$という値をとる曲線は$y=x^2+1$である。

（2）曲線群は $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$を満たす。したがって、この曲線群は

$y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{4}x^2+x+c$ であり、3 次曲線を c の値に応じて上下させたグラフが

得られる。れらの曲線で$x=0$において$y(0)=2$という値をとる曲線は$c=2$とし

て、 $y=\dfrac{1}{9}x^3+\dfrac{1}{4}x^2+x+2$ である。

(3) 求める曲線上の点(x,y)における接線の傾きは微分係数y'で与えられるので、接線は

$Y-y=y'(X-x)$である。この直線がx、y軸と交わる点はそれぞれ、$\left(\dfrac{xy'-y}{y'},0\right)$

および、$(0,y-xy')$であるので、条件は$\left(\dfrac{xy'-y}{y'}\right)^2+(y-xy')^2=a^2$　①　と現せる。

この微分方程式をyについて解くと、$y=xy'\pm\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$　②　となるが、この

$y=xy'+f(y')$の形の微分方程式をクレイロー（Clairaut）の微分方程式と呼ばれ、

曲線の接線に対して条件を与えることで、その条件を満たす曲線を求める問題で登場する。たとえば、包絡線を求める問題など。これに対して解き方と考え方ができている。②式で、$y'=c$が解であることは、直接代入してみれば分かる。実際、代入すれば$y=xc\pm\dfrac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$であるが、これは$y'=c$であり、座標軸で切り取られる長さは確かに$a$になっている。この直線は傾きが任意に変化するが、座標軸を切る位置もそれに合わせて変化し、結果として座標軸で切り取られる長さが一定値のaである。ところが、この積分定数をどのように変化させても得られない別の解がある。それを求めるために②の両辺を微分する。$y'=y'+x\dfrac{dy'}{dx}\pm\dfrac{\partial}{\partial y'}\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\dfrac{dy'}{dx}$　これより、

$\left(x \pm \frac{\partial}{\partial y'} \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \frac{dy'}{dx} = 0$　③　となるが、これを満たすものとして、$\frac{dy'}{dx} = 0$ が得られる。これを積分して、$y' = c$、あるいは更に積分して、$y = cx + b$ となる。ここで、座標軸で切り取られる長さが a である、という条件から $b = \pm \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ が得られ、

$y = xc \pm \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$　④　が解として求まる。もう一つの解は③より、

$x \pm \frac{\partial}{\partial y'} \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ つまり、$x \pm a \frac{\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$　⑤　となる。書き直して、

$x \pm \frac{a}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$　⑥　が得られる。⑥式から与えられる曲線の接線の傾きが直線④と等しい傾きを共有することで、この曲線が包絡線を与えることができる。つまり、⑥において $y' = c$ と置いて、④式と⑥式から c を消去すれば、この曲線が求まる。これがもう一つの解、特殊解である。④式で $c = \tan\varphi$ と置けば、⑥式は

$x = a\cos^3\varphi$　⑦　と変換され、④式は

$y = \mp a\cos^3\varphi\tan\varphi \pm a\sin\varphi = \pm a\sin^3\varphi$　⑧　と変換される。⑦と⑧式の $2/3$ を加えれば、$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$　⑨　が得られる。これはアステロイドと言われる。これは特殊解であり、積分定数を含まない。この関数を描くと、確かにもう一つの解、直線、が接線となっていて、この直線群の包絡線となっていることが確認できる。